I.F Théorème de Gauss-Lucas

Théorème 13: Gauss-Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Démonstration.
Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on peut écrire $P = \lambda \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{n_k}$ où $r \geqslant 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_1, ...\lambda_r \in \mathbb{C}$ sont les racines deux à deux distinctes de P et $n_1, ..., n_r$ leur ordre respectif. Alors :

$$P' = \lambda \sum_{k=1}^{n} = n_k (X-\lambda_k)^{n_k-1} \prod_{\substack{l=1,\dots,r \\ l\neq k}} (X-\lambda_l)^{n_l}.$$

On obtient alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{X-\lambda_k}$$

Si $z \in \mathrm{Rac}(P')$, alors :
- Soit z est l'une des racines λ_k, et elle est alors évidemment dans l'enveloppe convexe des racines de P ;
- Sinon, on peut écrire :

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{z-\lambda_k} = \sum_{k=1}^{r} n_k \frac{\overline{z-\lambda_k}}{|z-\lambda_k|^2}$$

En conjuguant on a encore :

$$\sum_{k=1}^{r} n_k \frac{z-\lambda_k}{|z-\lambda_k|^2} = 0$$

On extrait donc z en extrayant la somme qui le comporte :

$$z = \frac{\sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}\lambda_k}{\sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2}}{\sum_{l=1}^{r} \frac{n_l}{|z-\lambda_l|^2}} \lambda_k$$

Cette dernière formule exprime que le fait que z s'écrit comme barycentre à coefficients dans $]0,1[$ des racines $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ de P :

$$z = \mathrm{Bar}\left(\lambda_k, \frac{n_k}{|z-\lambda_k|^2} \times \sum_{l=1}^{r} \frac{n_l}{|z-\lambda_l|^2}\right).$$

On obtient donc que $z \in \mathrm{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.
Soit enfin :

$$\mathrm{Rac}(P') \subset \mathrm{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_r).$$

■

Corollaire 14

Le plus grand entier $n \geqslant 2$ tel que les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1 est 7.

Démonstration.
Si $n=2$:

$$P(X) = (X+1)^2 - X^2 - 1 = 2X$$

a une seule racine qui est 0. On peut donc supposer $n > 2$.

Si $n \geqslant 3$:

$$P(X) = (X+1)^n - X^n - 1$$

Donc

$$P'(X) = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1}$$

Si z est une racine de P', alors $z \neq 0$, et donc

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n-1} = 1$$

C'est-à-dire qu'il existe $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $\frac{z+1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$.
Mais, si $k = 0$ alors $z + 1 = z$ et c'est absurde. Donc $k \in [\![1, n-2]\!]$ et les racines de P' sont dans $\{z_k \quad / \quad k \in [\![1, n-2]\!]\}$ où z_k est défini par $\frac{z_k+1}{z_k} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$, i.e.

$$z_k = \frac{e^{\frac{-ik\pi}{n-1}}}{2i\sin\frac{k\pi}{n-1}}$$

Mais d'après le théorème de Gauss-Lucas si les racines de P sont de module 1 ou nul, alors nécessairement celles de P' sont dans le disque unité.

Or $|z_1| = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right)}$ et donc si $n \geqslant 8$ alors :

$$2\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right) < 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

puis $|z_1| > 1$ donc $n \leqslant 7$

Si $n = 7$:

Posons $P_0(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On a que -1 et 0 sont racines de P_0. Ainsi, P_0 s'écrit (après DE)

$$P_0(X) = X(X+1)(7X^4 + 14X^3 + 21X^2 + 14X + 7)$$

Le polynôme $Q(X) = (X^4+2X^3+3X^2+2X+1)$, est son propre polynôme réciproque : $Q(X) = X^4 Q\left(\frac{1}{X}\right)$.
On peut donc l'écrire :

$$\begin{aligned}
Q(X) &= X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 \\
&= X^2\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 2X^2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 3X^2 \\
&= X^2\left(\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 3\right) \\
\text{en posant } Y = X + \frac{1}{X} \qquad &= X^2(Y^2 - 2 + 2Y + 3) \\
&= 7X^2(Y-1)^2 \\
&= 7X^2(X + \frac{1}{X} - 1)^2 \\
&= (X^2 + X + 1)^2
\end{aligned}$$

Au total $P_0 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$ et ses racines sont exactement : $0, 1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ qui est contenu dans le disque unité.
L'entier recherché est donc 7. ■